(1) (d) (i) ano – například funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

f je neklesající a tedy $f \in R([0,1])$.

(ii) ano – například funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f je spojitá na $[0,1]$ a tedy $f \in R([0,1])$.

Zároveň pro každé $\delta > 0$ existují $x_1, x_2 \in (0, \delta]$,

že $f(x_1) = x_1 > 0 = f(0)$

a $f(x_2) = -x_2 < 0 = f(0)$

Tedy f není monotónní na žádném intervalu $[0,\delta], \delta > 0$.

(2) (i) neplatí - stačí zvolit $f(x) = \operatorname{sgn}(x+3)$, $g(x) = -\operatorname{sgn}(x+3)$

potom f ani g nemá limitu v bodě -3,

ale $\lim_{x \to -3} f(x) + g(x) = 0$.

(ii) platí - podle aritmetiky limit

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \left(f(x) + g(x) - g(x) \right)$$

obě limity existují

$$= \lim_{x \to -3} f(x) + g(x) - \lim_{x \to -3} g(x)$$

$$= 0 - \lim_{x \to -3} g(x)$$

(iii) stačí zvolit $f(x) = (x+3)^2 = h(x)$ a $g(x) = x+3$

potom $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to -3} 1 = 1$

a $$\lim_{x \to -3^\pm} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to -3^\pm} \frac{(x+3)^2 + (x+3)}{(x+3)^2}$$

$$= \lim_{x \to -3^\pm} \frac{x+4}{x+3} = \pm \infty$$

Tedy $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)}$ neexistuje.

(3) (i) neplatí – například pro $a_n = (-1)^n$

(ii) neplatí – například pro $a_n = 0$

(iii) neplatí – například pro $a_n = 0$

(iv) tohle bylo některými pochopeno, jako že je limita vlastní (jak to bylo původně míněno, ale špatně napsáno), a některými, jako že je limita v $\mathbb{R}^*$. Byly akceptovány obě odpovědi, pokud byly řádně zdůvodněny.

(v) platí – je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, potom položíme $x = L$

(vi) platí – podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje podposloupnost $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R}$ a stačí položit $x = a$.

tohle byla myšlenka příkladu, někteří z vás si ale všimli, že stačí položit $x = x_n$, pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$, čímž mě přerezli :o)